Kansrekening 18-6-'01

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw een doos met 10 rode en 15 witte ballen. Er worden 3 ballen getrokken uit de doos zonder terugleggen. Bekijk nu de volgende gebeurtenissen: bij de gebeurtenis A is de eerste bal rood en bij de gebeurtenis B is de laatste bal wit.

a. Beschrijf de gebeurtenis $A \cap B$ en bereken de kans $P(A \cap B)$;
b. Beschrijf de gebeurtenis $A \cup B$ en bereken de kans $P(A \cup B)$;

We voegen nu nog 20 blauwe ballen toe. Er zitten nu dus 10 rode, 15 witte en 20 blauwe ballen in de doos. We geven de kleur van een bal aan met R (rood), W (wit) en B (blauw). Er worden 5 ballen getrokken zonder terugleggen. De combinatie (RWB...) betekent bijvoorbeeld dat de eerste bal rood is, de tweede wit, de derde blauw enz.

c. Laat zien met behulp van een berekening dat de kans op (RWRBB) gelijk is aan de kans op (BWBRR).
d. Bereken de kans dat er 2 witte en 3 blauwe ballen zijn getrokken.

II

1. Zij X een stochastische variabele (s.v.) die waarden in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ aanneemt met kans $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$. (Dit wordt voortaan afgekort met $X \in \pi(\lambda)$).

Bereken de genererende functie $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k$, $E(X)$ en $\sigma^2(X)$.

2. Laat X_1 en X_2 onafhankelijke s.v. zijn met $X_i \in \pi(\lambda_i)$. Bepaal de verdeling van $X = X_1 + X_2$.

3. Toon aan, onder dezelfde voorwaarden als in 2., dat $P(X_1 = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ en bepaal p en q.

4. Laat omgekeerd X_1 en X_2 twee s.v. zijn zodanig dat $X := X_1 + X_2 \in \pi(\lambda)$ en zó dat $P(X_1 = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

i. Bereken $P(X_1 = k, X_2 = \ell) = p_{k,\ell}$ en bepaal de verdelingen van X_1 en X_2.

ii. Zijn X_1 en X_2 onafhankelijk ?

Aanwijzing: Druk $p_{k,\ell}$ uit in termen van $P(X_1 = k, X_2 = \ell \mid X = k + \ell)$.

III

Zij $(X_i)_{i \geq 1}$ een rij onafhankelijke s.v. met $P(X_i \leq t) = \int_0^t e^{-x}dx$ voor $t \geq 0$ en $P(X_i \leq t) = 0$ voor $t < 0$.

1. Bereken $E(X_i)$ en $\sigma^2(X_i)$.

2. Toon aan dat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ verdeeld is met de dichtheid $Y(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$ (waar $Y = 1_{[0,+\infty)}$ de Heaviside functie is).

Aanwijzing: We herinneren aan de dichtheid van de gammaverdeling met parameters $\alpha > 0$, $r > 0$: $\gamma_{\alpha,r}(x) = Y(x)\frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-rx}$ en aan het convolutieproduct $\gamma_{\alpha,r} * \gamma_{\beta,r} = \gamma_{\alpha+\beta,r}$.

3. Toon aan dat voor alle $\lambda \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\lambda\sqrt{n}+n} \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2}dx$$

Aanwijzing: Gebruik de centrale limiet stelling.

[1]De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk